4. **Kostenminimierung vs. Outputmaximierung: ÜB 4 Aufgabe 5**
5. **Gewinnmaximierung: Welche Menge stellt ein Unternehmen her?**

---

4. Kostenminimierung vs. Outputmaximierung: ÜB 4 Aufgabe 5

➢ Zusammenfassung theoretischer Grundlagen

- Ein Unternehmen versucht seine Produktion möglichst effizient auszuführen
- Das bedeutet, es muss entweder die **Kosten bei gegebenen Produktionsniveau minimieren** ***(Präsi F. 1)*** ;
    - Nebenbedingung: Erreichung Produktionsniveau $f(v_1, v_2) = \bar{Y}$
    - Zielfunktion: Kostenminimierung $Min\ Z = z_1 v_1 + z_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{Z}{z_2} - \frac{z_1}{z_2} v_1$
- Analog zur Haushaltstheorie gilt als Optimalitätsbedingung GRtS=relativer Faktorpreis (GRS = relativer Preis)
- Dies gilt im Tangentialpunkt „a“ und wird als Minimalkostenkombination (MKK) bezeichnet
- Auch dieses Problems wird mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes gelöst
- Auch hier können wir die Betrachtungsperspektive wechseln
- Hat ein Unternehmen einen vorgegebenen Kostenrahmen, so kann es auch versuchen das **Produktionsniveau Y zu maximieren** ***(Präsi F. 2)***
    - Nebenbedingung: Ausschöpfung des gegebenen Kostenbudgets $\bar{Z} = z_1 v_1 + z_2 v_2$
    - Zielfunktion: Produktionsniveaumaximierung $Max\ f(v_1, v_2)$

- Auch bei diesem Maximierungsproblem folgt als Optimalitätsbedingung für die Minimalkostenkombination (MKK); rel. Faktorpreis = GRtS
- Das Max- bzw. das Min-Problem führen zur einer analogen Optimalbedingung
    - Wird das sich im Max-Problem ergebende optimale Produktionsvolumen im Minimierungsproblem als zu erreichendes Produktionsvol. vorgegeben
    - dann wird das Minimierungsproblem durch dieselbe Faktoreinsatzkombination v1*, v2*optimiert

- Liegen nun verschiedene Outputniveaus vor ***(Präsi F. 3)***, dann existieren bei gegebenen Faktorpreisen mehrere MKK ***(7 mal klicken)***
- Verbindet man diese erhält man den sogenannten Expansionspfad. ***(Klick)*** Dies ist der kostenminimale Weg für ein Unternehmen um seine Produktion auszuweiten.
- In jedem Punkt ist die Optimalitätsbedingung GRtS= rel. Faktorpreis erfüllt
- Da Preisänderungen zur Änderung des Verlaufs der Kostenrestriktion [v2=(Z/z2)-(z1/z2)*v1] führen ***(Klick)***, ergeben sich für andere rel. Faktorpreise ***(Klick)*** auch andere Expansionspfade (nämlich mit anderer Steigung) . ***(Klick)***
- Expansionspfade <u>homogener Produktionsfunktionen</u> sind bedingt durch die Konstruktion der Funktion linear
    - Eine Faktorvariation um b, entspricht einer Outputvariation um b^p(rho) beider Einsatzfaktoren
      → Das Faktoreinsatzverhältnis [v20/v10] ist konstant
      → b gibt den Ort bzw. die Bewegung an, an dem man sich auf dem Expansionspfad befindet
    - Da zusätzlich kein konstanter Summand innerhalb der Funktion vorkommt, entspringt sie dem Ursprung

- Nicht-homogene Produktionsfunktionen können durchaus dazu führen, dass der Expansionspfad andere Verläufe annimmt. So kann sich das Faktoreinsatzverhältnis mit fortschreitender Outputsteigerung durchaus ändern, die Produktion z.B. kapitalintensiver werden (bspw. durch Einsatz von Massenfertigungsbändern, was sich erst ab einem bestimmten Outputvolumen lohnt)
- Durch einsetzen des Optimalitätswertes (hier: Expansionspfades), der durch den Lagrange-Ansatz hergeleitet wurde, in die Produktionsfunktion erhält man die bedingten Faktornachfragen (bedingt durch das Produktionsniveau und den relativen Preis)
- Dabei wird die dritte Optimalitätsbedingung, die die NB berücksichtigt ignoriert ***(Präsi F. 4/5)***
  - Wir suchen nämlich nicht den einen Minimalkostenpunkt „a“ wie in der HHT den opt. Konsumpunkt
  - In der HHT sind wir von einem Zielnutzen oder beschränkten Budget ausgegangen
  - In der Produktionstheorie wird weder ein Ziel-Produktionsniveau vorgegeben noch die Kosten beschränkt.
  - Im Gegenteil: Man sucht nach dem optimalen Weg die Produktion bei möglichst geringen Kosten auszudehnen
- Die langfristige Kostenfunktion Z* ergibt sich dann durch einsetzen der bedingten Faktornachfragen in die Kostenrestriktion

5. Welche Menge wird von den Unternehmen angeboten? Gewinnmaximierung am Beispiel ÜB 5 Aufgabe 4/5/6

➢ Ermitteln Sie zu folgender Produktionsfunktion die Menge, die ein gewinn-maximierendes Unternehmen bereitstellt und berechnen sie die unbedingten Faktornachfragen

- Die Produktionsfunktion sei gegeben durch:

  (40/54) $Y(L,K) = L^{\frac{3}{2}} \bullet K^{\frac{1}{2}}$
- Der Gewinn wird üblicher Weise durch eine Gewinnfunktion der Form: Gewinn = Erlös – Kosten beschrieben es gilt also:

  (55) $\Pi = P \bullet Y(K,L) - p_K K - p_L L$
- Die Produktionsfkt. kann in Beziehung (55) eingesetzt werden.

  (56) $\Pi = P \bullet L^{\frac{3}{2}} \bullet K^{\frac{1}{2}} - p_K K - p_L L$
- Da sich die Unternehmen rational verhalten und zudem auf einem vollkommenen Markt befinden, können die Unternehmen ihren Profit nur über die Menge Y maximieren. Diese wird wiederum durch den Faktoreinsatz von K und L bestimmt
- Die Profitfunktion wird also hinsichtlich der beiden Einsatzfaktoren optimiert, d.h. wir müssen sie nach K und L ableiten:

  (57) $\frac{\partial \Pi}{\partial K} = \frac{1}{2} P L^{\frac{3}{2}} \bullet K^{-\frac{1}{2}} - p_K = 0 \Rightarrow$ (57a) $p_K = \frac{1}{2} P L^{\frac{3}{2}} \bullet K^{-\frac{1}{2}}$

  (58) $\frac{\partial \Pi}{\partial L} = \frac{3}{2} P L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} - p_L = 0 \Rightarrow$ (58a) $p_L = \frac{3}{2} P L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$

- Eine Optimalitätsbedingung ist also, dass das Wertgrenzprodukt (Absatzpreis*MPL) dem Faktorpreis entspricht
- Außerdem können wir durch Division von (58a) und (57a) die bereits bekannte Optimalitätsbedingung:

$$\frac{(58a)}{(57a)} = \frac{p_L}{p_K} = \frac{\frac{3}{2} PL^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} PL^{\frac{3}{2}} \bullet K^{-\frac{1}{2}}} = \frac{P \bullet \partial Y / \partial L}{P \bullet \partial Y / \partial K} = GRtS = \frac{WGP_L}{WGP_K} = \frac{\partial Y / \partial L}{\partial Y / \partial K} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

für die kostenminimale Produktion wieder finden: rel. Faktorpreis = GRtS

- Da beide Optimalbedingungen beachtet werden müssen lösen wir Beziehung (57a) nach K auf und setzten in (58a) ein. Dabei erhalten wir die unbedingte Faktornachfrage nach der Arbeit

$$(57a)\ p_K = \frac{1}{2} PL^{\frac{3}{2}} \bullet K^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\ (59)\ \frac{2p_K}{PL^{\frac{3}{2}}} = K^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{2p_K}{PL^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{K^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow K^{\frac{1}{2}} = \frac{PL^{\frac{3}{2}}}{2p_K}$$

$$(59)\ K = \left(\frac{PL^{\frac{3}{2}}}{2p_K} \right)^2 = \frac{P^2 L^3}{4p_K^2}$$

- Jetzt einsetzen von (59) in (58a)

$$(58a)\ p_L = \frac{3}{2} PL^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} \cap (59)\ K = \frac{P^2 L^3}{4p_K^2}$$

$$(60)\ p_L = \frac{3}{2} PL^{\frac{1}{2}} \left(\frac{P^2 L^3}{4p_K^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} PL^{\frac{1}{2}} PL^{\frac{3}{2}} 2^{-1} p_K^{-1} = \frac{3P^2 L^2}{4 p_K}$$

$$(60)\ p_L = \frac{3P^2 L^2}{4 p_K} \Rightarrow L^2 = \frac{4 p_L p_K}{3P^2}$$

$$(60)\ L^* = \sqrt{\frac{4 p_L p_K}{3P^2}}$$

- unbedingte Nachfrage nach Arbeit; gibt an: Welche optimale also profitmaximierende Menge an Arbeit bei gegebenen Preisniveau und Faktorpreisen nachgefragt wird!
- die bedingte Nachfrage hingegen gibt die Substitutionseffekte bei gegebenen Output Y zwischen Arbeit und Kapital an, wenn sich relative Preise ändern

- L* (60) wird nun wiederum in (59) eingesetzt um die unbedingte Nachfrage nach Kapital K* zu erhalten

$$(60)\ L^* = \sqrt{\frac{4p_L p_K}{3P^2}} \cap (59)\ K = \frac{P^2 L^3}{4p_K^2}$$

$$(61)\ K^* = \frac{P^2\left(\frac{4p_L p_K}{3P^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{4p_K^2} = \frac{4^{\frac{3}{2}} P^2 p_L^{\frac{3}{2}} p_K^{\frac{3}{2}} 3^{-\frac{3}{2}} P^{-3}}{4p_K^2} = 4^{\frac{3}{2}} P^2 p_L^{\frac{3}{2}} p_K^{\frac{3}{2}} 3^{-\frac{3}{2}} P^{-3} 4^{-1} p_K^{-2}$$

$$(61)\ K^* = 4^{\frac{1}{2}} P^{-1} p_L^{\frac{3}{2}} p_K^{-\frac{1}{2}} 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{2p_L^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}} P p_K^{\frac{1}{2}}}$$

$$(61)\ K^* = \frac{2}{P p_K^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{p_L}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

- der optimale Output würde sich durch einsetzen der unbedingten Nachfragen (60) und (61) in die Produktionsfunktion ergeben

➢ Bestimmten Sie mit den Ergebnissen aus den letzten Aufgaben die opt. Profitfunktion

- Die opt. Profitfunktion lautet:

$$(55)\ \Pi^* = P^* \bullet Y^*(K, L) - p_K K^* - p_L L^*$$

- P* hätte sich ergeben, wenn man die partielle Ableitung der Profitfunktion nach dem Absatzpreis berücksichtigt hätte

- Setzt man die optimalen Werte

$$(61)\ K^* = \frac{2}{P p_K^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{p_L}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$(60)\ L^* = \sqrt{\frac{p_L p_K}{3P^2}}$$

- ein, so erhält man:

$$(56)\ \Pi = P \bullet L^{\frac{3}{2}} \bullet K^{\frac{1}{2}} - p_K K - p_L L$$

$$(61)\ K^* = \frac{2}{Pp_K^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{p_L}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$(60)\ L^* = \sqrt{\frac{p_L p_K}{3P^2}}$$

$$(62)\ \Pi^* = P^* \bullet \left(\sqrt{\frac{p_L p_K}{3P^2}}\right)^{\frac{3}{2}} \bullet \left(\frac{2}{Pp_K^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{p_L}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - p_K \frac{2}{Pp_K^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{p_L}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - p_L \sqrt{\frac{p_L p_K}{3P^2}}$$

- Verifizieren Sie Hotteling's Lemma mit den Ergebnissen der letzten Aufgabe und mit Hilfe des Enveolope Theorems

  - Hotteling's Lemma ist eine weiterer Spezialfall des Envelope-Theorems, d.h. insbesondere, dass nur die direkten Effekte entscheidend sind
  - Es besagt, dass sich der Profit eines Unternehmens (unter hier gegebenen Annahmen; vollständiger Markt, Mengenanpasserverhalten erhöht, wenn sich der Absatzpreis P erhöht oder aber der Profit wird geringer, wenn die Faktorpreise steigen
  - In diesem Modell entsprich daher, die Veränderung des optimalen Profits, z.B. abhängig von einer Preisänderung des Faktors Arbeit lediglich der unbedingten Faktornachfrage nach Arbeit usw.
  - Es reicht also die allgemeine Form der opt. Ausgabenfunktion zu betrachten:

$$(55)\ \Pi^* = P^* \bullet Y^*(K, L) - p_K K^* - p_L L^*$$

$$(63)\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial P^*} = Y^*$$

$$(64)\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial p_K} = -K^*$$

$$(65)\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial p_L} = -L^*$$